

Réponses à Jean-Pierre Petit sur l'espace-temps de Schwarzschild

Alessandro Roussel

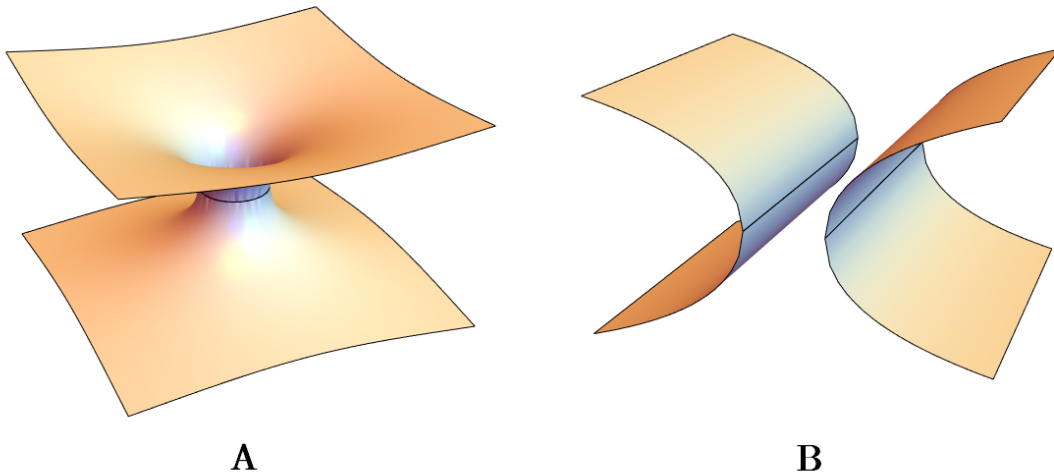
5 Mars 2022

On prendra dans la suite $c = 1$, une signature $(+ - - -)$, et on notera r et R les coordonnées radiales de Schwarzschild, en respectant la définition : $R \equiv (r^3 + R_S^3)^{1/3}$. Les sections 1 à 7 ci-dessous sont plus ou moins indépendantes.

1 Plongement des coupes spatiales

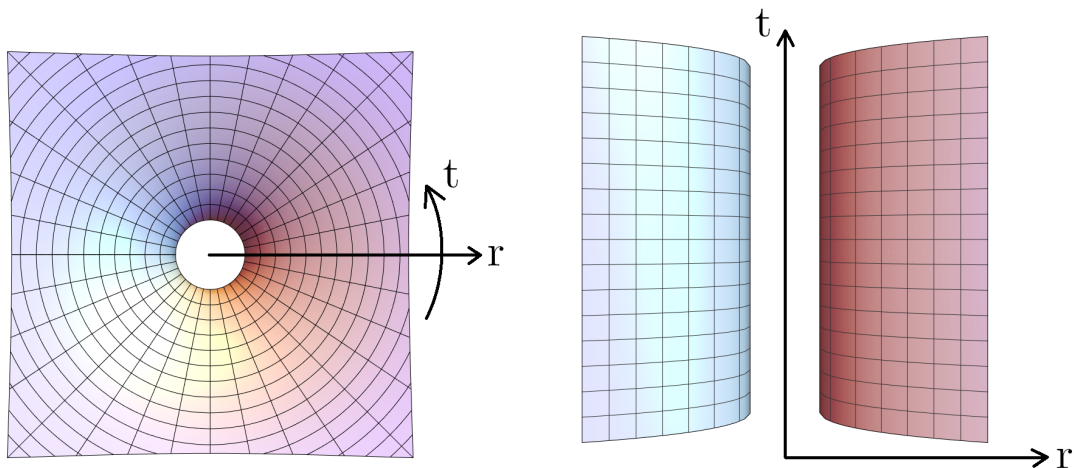
1.1 Exemple Riemannien

Oublions quelques instants la relativité générale, et imaginons les deux surfaces 2D ci-dessous :



Ces deux surfaces sont géométriquement différentes. La surface A est topologiquement équivalente à un cylindre, tandis que la surface B est topologiquement équivalente à l'union de deux plans.

Choisissons de munir ces deux surfaces de coordonnées (t, r) telles que montrées ci-dessous :



En notant α le rayon de l'ouverture entre les deux nappes sur chacune des deux surfaces, A et B sont alors définies dans l'espace 3D par la même équation :

$$z(t, r) = \pm 2\sqrt{\alpha}\sqrt{|r| - \alpha} \quad (1.1)$$

Les métriques 2D induites sur chacune de ces deux surfaces sont données par :

$$g_A = r^2 dt^2 + \left(1 - \frac{\alpha}{|r|}\right)^{-1} dr^2 \quad (1.2)$$

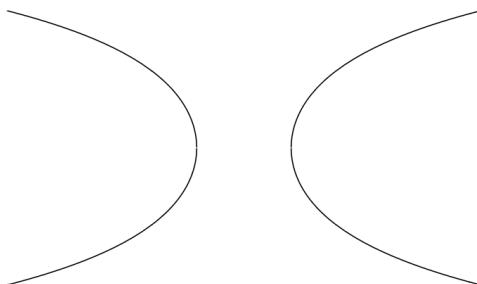
$$g_B = dt^2 + \left(1 - \frac{\alpha}{|r|}\right)^{-1} dr^2 \quad (1.3)$$

On voit que ces deux métriques sont différentes. Pour cause, la géométrie des deux surfaces est fondamentalement différente. Dans le premier cas, les coordonnées r et t sont couplées, au sens où g_{tt} dépend de r , tandis que dans le second cas, les deux coordonnées sont parfaitement indépendantes.

Mais considérons une coupe $t = \text{const.}$. Dans les deux cas la métrique induite est la même :

$$g_A|_{t=\text{const.}} = g_B|_{t=\text{const.}} = \left(1 - \frac{\alpha}{|r|}\right)^{-1} dr^2 \quad (1.4)$$

A partir de cette métrique 1D on peut construire un plongement 2D. La courbe obtenue est décrite dans le plan (x, y) par l'équation $y = \pm 2\sqrt{\alpha}\sqrt{|x| - \alpha}$.



Imaginons un instant qu'on n'ait observé que ces coupes des deux métriques. On pourrait naïvement penser que les surfaces A et B sont topologiquement identiques, toutes deux constituées de deux nappes disjointes. Mais ce raisonnement est bien sûr invalide, car comme on l'a vu, les surfaces A et B sont différentes. Étudier la géométrie des coupes $t = \text{const.}$ sur ces deux surfaces ne permet pas de les différencier l'une de l'autre.

Ces deux métriques, toutes deux indépendantes de la coordonnée t , présentent des coupes à $t = \text{const.}$ identiques, alors que leur topologie est fondamentalement différente. Prendre des coupes $t = \text{const.}$ ne nous permet pas de retrouver la topologie globale des deux surfaces. En particulier, on ne peut pas déduire la forme des géodésiques à partir uniquement des coupes $t = \text{const.}$

1.2 Revenons à la métrique de Schwarzschild

Dans le cadre de la métrique de Schwarzschild, la situation est exactement la même. La métrique induite sur les coupes $t = \text{const.}$ ne nous permet pas de déduire la géométrie globale de l'espace-temps. En supprimant la coordonnée t , on néglige la dépendance en R de la composante g_{tt} , qui est pourtant fondamentale puisque c'est ce couplage qui engendre le phénomène de gravité.

De façon analogue à la section précédente, introduisons ces deux métriques :

$$g_A = \left(1 - \frac{R_S}{R}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{R_S}{R}\right)^{-1} dR^2 - R^2 d\Omega_2^2 \quad (1.5)$$

$$g_B = dt^2 - \left(1 - \frac{R_S}{R}\right)^{-1} dR^2 - R^2 d\Omega_2^2 \quad (1.6)$$

Pour ces deux espaces-temps, les coupes $t = \text{const.}$ ont exactement la même métrique, et donc exactement le même plongement (le paraboloïde de Flamm \mathcal{P}). Pourtant ces deux espaces-temps sont fondamentalement différents. Le premier décrit la géométrie de Schwarzschild, pour laquelle g_{tt} dépend de R , tandis que le deuxième décrit un espace-temps de type "trou de ver traversable", pour lequel les coordonnées spatiales et temporelles sont découplées, et dont la géométrie est simplement $\mathbb{R} \times \mathcal{P}$. On notera que g_A engendre une gravité, tandis que g_B est non-gravitationnelle.

La solution est d'autant plus analogue qu'en représentant les coupes $t = \text{const.}$ dans l'espace-temps de Kruskal, on s'aperçoit que la coordonnée t joue exactement le même rôle que dans le cas de la surface A dans la section précédente.

On a démontré qu'étudier des coupes d'un espace-temps n'est pas suffisant pour faire des conclusions sur sa géométrie globale.

2 Déterminant nul

Etudions la métrique suivante, où α est une constante quelconque :

$$g = dt^2 - \left(1 + \frac{\alpha^3}{x^3}\right)^{-4/3} dx^2 - dy^2 - dz^2 \quad (2.1)$$

A l'infini, la métrique coïncide avec la métrique de Minkowski, les coordonnées (t, x, y, z) y sont Lorentziennes et $g \approx dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$. Le déterminant de la métrique 2.1 est donné par :

$$|g| = - \left(1 + \frac{\alpha^3}{x^3}\right)^{-4/3} \quad (2.2)$$

Ce déterminant s'annule en $x \rightarrow 0^+$. On pourrait donc penser que l'espace-temps que décrit cette métrique se limite à la zone $x > 0$. Mais faisons le changement de coordonnées suivant :

$$\tilde{x} \equiv (x^3 + \alpha^3)^{1/3} \quad (2.3)$$

La métrique devient alors :

$$g = dt^2 - d\tilde{x}^2 - dy^2 - dz^2 \quad (2.4)$$

On remarque qu'il s'agissait depuis le début de la métrique de Minkowski, écrite dans des coordonnées peu adaptées. De cette nouvelle écriture de la métrique, on identifie que la coordonnée

\tilde{x} peut s'étendre sur tout \mathbb{R} sans aucun problème géométrique. La condition $x > 0$, équivalente à $\tilde{x} > \alpha$, était due uniquement à un mauvais système de coordonnées. L'espace-temps sous-jacent était celui de Minkowski, mais la coordonnée x ne permettait d'en cartographier qu'un demi-espace.

Cet exemple permet de voir que l'annulation du déterminant en $x = 0$ n'avait aucun sens géométrique, elle ne nous renseignait que sur la dégénérescence de notre système de coordonnées. Un changement de coordonnées nous a permis de retrouver un déterminant strictement négatif.

Cet exemple montre également que la forme des coordonnées à l'infini ne nous renseigne en rien sur leur comportement général. Dans les deux cas (2.1 et 2.4) les coordonnées utilisées sont Lorentziennes à l'infini, mais leur comportement général est différent.

Dans le cadre de la métrique de Schwarzschild, la situation est exactement la même. Un changement de coordonnées permet de recouvrer un déterminant régulier et non nul. En coordonnées d'Eddington-Finkelstein par exemple, la métrique s'écrit :

$$g = \left(1 - \frac{R_S}{R}\right) dv^2 - 2dv dR - R^2 d\Omega_2^2 \quad (2.5)$$

Et son déterminant est strictement négatif au voisinage de l'horizon :

$$|g| = -R^4 \sin^2 \theta \quad (2.6)$$

Il suffit de montrer que le déterminant est non nul dans un seul système de coordonnées, peu importe lequel, pour démontrer qu'il n'y a pas de problème de géométrie, puisque la signature d'une métrique est invariante par changement de coordonnées (loi de Sylvester). Dans le cas d'un changement de coordonnées, l'annulation du déterminant provient de l'annulation de la Jacobienne, et n'est donc aucunement liée à la métrique.

3 Géodésique

Partons de la métrique de Schwarzschild écrite en coordonnées (t, R, θ, φ) :

$$g = \left(1 - \frac{R_S}{R}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{R_S}{R}\right)^{-1} dR^2 - R^2 d\Omega_2^2 \quad (3.1)$$

On peut obtenir l'équation des géodésiques à partir du Lagrangien $L \equiv g(X, X)$, où X est le vecteur tangent à la géodésique, exprimé en termes de ses composantes $(X^t, X^R, X^\theta, X^\varphi)$. Pour simplifier on considérera des géodésiques radiales. On fixe donc $X^\theta = X^\varphi = 0$, ce qui donne :

$$L \equiv \left(1 - \frac{R_S}{R}\right) (X^t)^2 - \left(1 - \frac{R_S}{R}\right)^{-1} (X^R)^2 \quad (3.2)$$

On s'intéresse à une géodésique de genre temps, paramétrée par un temps propre réel. On exige donc un Lagrangien strictement positif. Pour que le paramètre de la géodésique corresponde au temps propre, on normalise le Lagrangien à 1. On obtient ainsi une première équation :

$$\left(1 - \frac{R_S}{R}\right) (X^t)^2 - \left(1 - \frac{R_S}{R}\right)^{-1} (X^R)^2 = 1 \quad (3.3)$$

D'autre part on utilise la composante temporelle d'Euler-Lagrange, qui nous donne une grandeur conservée comme la métrique ne dépend pas de t : "l'énergie à l'infini par unité de masse" K .

$$\frac{\partial L}{\partial X^t} \propto \left(1 - \frac{R_S}{R}\right) X^t \equiv K = \text{const.} \quad (3.4)$$

Les équations 3.3 et 3.4 nous permettent ainsi de déduire la forme générale des géodésiques radiales de genre temps dans la métrique de Schwarzschild :

$$X^t = \frac{K}{1 - R_S/R}, \quad X^R = \pm \sqrt{K^2 - 1 + \frac{R_S}{R}} \quad (3.5)$$

Prenons le cas d'une particule test lâchée sans vitesse initiale depuis une altitude $R_0 \gg R_S$. La valeur de K est fixée par la condition $X^R|_{R=R_0} = 0$. En prenant la branche $X^R \leq 0$ pour décrire la chute de la particule, on obtient le vecteur tangent suivant :

$$X^t = \left(1 - \frac{R_S}{R}\right)^{-1}, \quad X^R = -\sqrt{\frac{R_S}{R}} \quad (3.6)$$

On observe que lorsque la particule s'approche de l'horizon ($R \rightarrow R_S$), la composante X^R tend vers -1 . En d'autres termes, la géodésique atteint l'horizon de Schwarzschild avec une vitesse radiale strictement négative. Si on décide de prolonger la géodésique, elle doit forcément l'être vers les $R < R_S$ à l'instant suivant, puisque $dR/d\tau = X^R < 0$.

Cependant on observe également que X^t diverge. Deux solutions s'offrent à nous :

- D'une part, on peut choisir de considérer la sphère $R = R_S$ comme une singularité où s'arrêtent les géodésiques. Ceci est injustifié puisqu'en changeant de coordonnées pour celles d'Eddington-Finkelstein, les composantes du vecteur tangent deviennent parfaitement régulières au niveau de l'horizon (en coordonnées normales également comme on le verra dans la section suivante).

- D'autre part, on peut choisir de changer de coordonnées pour prolonger la géodésique vers les $R < R_S$. **C'est l'unique possibilité de prolongement lisse si l'on souhaite respecter l'équation des géodésiques. Il est impossible de considérer que les géodésiques font demi-tour en $R = R_S$.**

4 Coordonnées normales

Pour étudier rigoureusement la géométrie au voisinage de l'horizon, il est judicieux de faire appel à des coordonnées normales, c'est à dire des coordonnées pour lesquelles la métrique est localement Lorentzienne. Choisissons une altitude quelconque au voisinage de l'horizon $R^* \gtrsim R_S$. Posons le changement de coordonnées suivant :

$$t = \left(1 - \frac{R_S}{R^*}\right)^{-1} \left(T - \sqrt{\frac{R_S}{R^*}} X\right) \quad (4.1)$$

$$R = R^* + \left(X - \sqrt{\frac{R_S}{R^*}} T\right) \quad (4.2)$$

Dans ce nouveau jeu de coordonnées (T, X) la partie radiale de la métrique de Schwarzschild devient :

$$g = dT^2 - dX^2 + o(X, T) \quad (4.3)$$

Les coordonnées (T, X) constituent des coordonnées normales au voisinage de l'altitude R^* . La métrique est Lorentzienne à l'ordre 1 en X et T . Comme ceci est valable pour toute valeur de $R^* > R_S$, la métrique est bien localement Lorentzienne sur l'horizon, en $R = R_S$.

D'autre part, la géodésique 3.6 que l'on avait déterminée se réécrit :

$$X^T = 1, \quad X^X = 0 \quad (4.4)$$

En d'autres termes, la géodésique se prolonge vers les T croissants, à X constant. Ceci correspond encore une fois à un décroissement de la coordonnée R . **On retrouve la conclusion précédente,**

à savoir que l'espace-temps est parfaitement régulier au niveau de l'horizon, et que les géodésiques radiales y continuent vers les $R < R_S$.

5 ds^2 négatif

Un argument soulevé par Jean-Pierre Petit est le signe du “ ds^2 ”. Selon Petit, le signe de cette grandeur nous indique si l'on se trouve sur l'objet géométrique, ou non.

Cet argument est effectivement valable dans le cas d'une variété Riemannienne. La métrique est une “vraie” métrique, et elle vérifie l'axiome de séparation : la distance entre deux points est toujours réelle, strictement positive, et ne s'annule que si les deux points sont confondus.

Mais dans le cadre de la relativité générale, l'espace-temps n'est pas décrit par une variété Riemannienne. Il est décrit par une variété Lorentzienne, dans laquelle la métrique est une “pseudo-métrique”. Elle ne respecte pas l'axiome de séparation puisque deux points distincts peuvent être séparés d'une distance nulle (c'est le cas des points parcourus par une géodésique de genre lumière). Le signe du ds^2 ne nous indique donc plus si l'on se trouve dans l'espace-temps ou non. En chaque point de l'espace-temps, quelque soit la métrique, il existe à la fois des vecteurs dont la norme ds^2 est positive, nulle, et négative.

On le voit bien dans la métrique de Minkowski :

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \quad (5.1)$$

Forcer ds^2 à être toujours positif comme le prescrit Petit est un contresens, puisque, contrairement à une variété Riemannienne, dans une variété Lorentzienne le signe de ds^2 dépend du vecteur d'accroissement des coordonnées (dt, dx, dy, dz) . Le même raisonnement est valable dans la métrique de Schwarzschild :

$$ds^2 = \left(1 - \frac{R_S}{R}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{R_S}{R}\right)^{-1} dR^2 - R^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (5.2)$$

On voit explicitement que le signe de ds^2 dépend des accroissements $dt, dR, d\theta, d\varphi$. Et ce, même lorsque $R > R_S$. C'est ce qui donne justement sa structure si particulière à l'espace-temps. Les cônes de lumière sont délimités par les intervalles ds^2 nuls, structure qui n'existe pas dans une variété Riemannienne.

Utiliser le signe de ds^2 pour déterminer le domaine d'application des coordonnées est donc un contresens, puisque, quelque soit la métrique, ce signe dépend forcément des accroissements. Que l'on soit au dessus, ou en dessous de l'horizon, il est toujours possible de trouver des vecteurs $(dt, dr, d\theta, d\varphi)$ dont le ds^2 est positif, nul, ou négatif.

6 Coordonnée ρ

Jean-Pierre Petit propose d'étudier la métrique de Schwarzschild dans un nouveau jeu de coordonnées $(t, \rho, \theta, \varphi)$, où l'on définit la nouvelle coordonnée radiale ρ par :

$$R \equiv R_S \log(e \cosh \rho) \quad (6.1)$$

La métrique de Schwarzschild (5.2) s'écrit alors :

$$g = \frac{\log(\cosh \rho)}{\log(e \cosh \rho)} dt^2 - \frac{\log(e \cosh \rho)}{\log(\cosh \rho)} \tanh^2 \rho R_S^2 d\rho^2 - R_S^2 \log(e \cosh \rho)^2 d\Omega_2^2 \quad (6.2)$$

Nous allons montrer que cet espace-temps n'est pas géodésiquement complet. Dans cette métrique, les géodésiques de genre temps, radiales, lancées depuis $\rho_0 \gg 0$, ont un vecteur tangent de la forme suivante :

$$X^t = \frac{\log(e \cosh \rho)}{\log(\cosh \rho)}, \quad X^\rho = \frac{-1}{R_S \tanh \rho \sqrt{\log(e \cosh \rho)}} \quad (6.3)$$

Lorsque $\rho \rightarrow 0^\pm$, on voit que $X^t \rightarrow \infty$ et $X^\rho \rightarrow \mp\infty$. Les équivalents en $\rho \sim 0^\pm$ de ces deux fonctions sont donnés ci-dessous :

$$X^t \sim \frac{2}{\rho^2}, \quad X^\rho \sim \frac{-1}{R_S \rho} \quad (6.4)$$

L'équivalent de X^ρ nous donne une équation différentielle pour ρ à proximité de l'horizon :

$$\dot{\rho} \sim \frac{-1}{R_S \rho} \quad \Rightarrow \quad \rho(\tau) \sim \sqrt{\frac{-2\tau}{R_S}} \quad (6.5)$$

On voit ici que la géodésique n'est définie que pour $\tau \leq 0$. Lorsque la géodésique atteint $\rho = 0$, le système de coordonnées n'est plus adapté pour décrire sa trajectoire, puisque $\rho(\tau)$ devient un nombre imaginaire pur. L'espace-temps ainsi décrit n'est donc pas géodésiquement complet.

Deux solutions s'offrent à nous :

- On peut décréter que $\rho = 0$ constitue une singularité, où s'arrêtent toutes les géodésiques. Mais ceci n'est pas physique, il s'agit d'une singularité illusoire puisqu'on a démontré auparavant que l'espace-temps est régulier au niveau de l'horizon.

- On peut décréter que ce système de coordonnées n'est pas adapté pour décrire l'espace-temps au voisinage de l'horizon. C'est la seule solution que l'on peut retenir, si l'on veut respecter l'équation des géodésiques. **On a démontré que cette coordonnée ρ n'est pas adaptée pour décrire l'espace-temps de Schwarzschild, puisqu'elle engendre un espace-temps géodésiquement incomplet, sans pour autant décrire une singularité physique.**

Enfin, Petit avance que la sphère de Schwarzschild se réduirait à un unique point, puisqu'elle correspond dans ces coordonnées à $\rho = 0$. Ceci n'est pas valide puisqu'il s'agit d'un point dans un espace de coordonnées, abstrait, et non d'un point au sens géométrique. La coordonnée ρ ne représente aucunement une distance radiale, il s'agit uniquement d'un nombre abstrait. En particulier, la sphère de Schwarzschild a une aire non nulle, et il ne peut donc pas s'agir d'un point au sens géométrique. Les termes de la métrique $g_{\theta\theta}$ et $g_{\varphi\varphi}$ devraient s'annuler si c'était le cas.

7 Métrique de Kruskal

Jean-Pierre Petit avance que la métrique de Kruskal ne serait pas valide, du fait qu'elle s'obtient à partir d'un changement de variables mal défini. On va montrer dans cette partie que la métrique de Kruskal est parfaitement régulière, qu'elle est solution de l'équation d'Einstein dans le vide, et qu'elle satisfait bien les conditions posées par Schwarzschild, à savoir qu'elle satisfait une symétrie sphérique, et qu'elle est statique, admettant un champ de Killing de genre temps à l'infini.

Oublions un instant la façon dont cette métrique est obtenue, et considérons seulement sa forme finale. Dans le jeu de coordonnées $(T, X, \theta, \phi) \in \mathbb{R}^2 \times \mathcal{S}^2$:

$$g = \frac{4R_S^3}{r(T, X)} e^{-r(T, X)/R_S} (dT^2 - dX^2) - r(T, X)^2 d\Omega_2^2 \quad (7.1)$$

Où r est la fonction définie par :

$$r(T, X) \equiv R_S \left(1 + W_0 \left(\frac{X^2 - T^2}{e} \right) \right) \quad (7.2)$$

W_0 est la branche principale de la fonction W de Lambert, définie sur $] -1/e, +\infty[$. On voit que cette définition nous impose une première restriction, à savoir que $X^2 - T^2 > -1$. La surface $X^2 - T^2 = -1$ est ce qu'on appellera la "singularité centrale". Elle correspond à $r(X, T) = 0$.

Pour tout $r > 0$, la métrique est régulière et bien définie. Son déterminant est donné par :

$$|g| = -16R_S^6 e^{-2r(T,X)/R_S} r(T, X)^2 \sin^2 \theta \quad (7.3)$$

Excepté aux pôles des coordonnées sphériques, il est parfaitement régulier, et strictement négatif, pour toutes valeurs de X et T satisfaisant que $r > 0$.

De plus, cette métrique vérifie manifestement une symétrie sphérique suivant les coordonnées (θ, φ) , et elle admet un champ de Killing k^μ :

$$k^\mu = (X, T, 0, 0) \quad (7.4)$$

Qui est parfaitement régulier sur tout l'ensemble de définition, et est bien de genre temps dans la limite $r \rightarrow \infty$. Ce vecteur de Killing correspond aux rotations hyperboliques dans l'espace (T, X) . Sa norme est nulle sur les surfaces $T = \pm X$, qui sont donc des horizons.

Pour finir, on peut calculer le tenseur de Ricci à partir de cette métrique. Le résultat est parfaitement régulier sur tout l'espace de définition et y est identiquement nul, indiquant qu'il s'agit bien d'une solution de l'équation d'Einstein dans le vide (*voir calcul ci-dessous sur Wolfram Mathematica*).

```

In[1]= vars = {T, X, \theta, \phi};

In[2]= metric = DiagonalMatrix[{{-32 m^3 / (r[X, T] Exp[-r[X, T]/(2 m)]}, {32 m^3 / (r[X, T] Exp[-r[X, T]/(2 m)]}, r[X, T]^2, r[X, T]^2 Sin[\theta]^2}}];

In[3]= metric // TableForm

Out[3]/TableForm=
      -32 e^{-r[X, T]/(2 m)} m^3 / r[X, T]      0      0      0
      0      32 e^{-r[X, T]/(2 m)} m^3 / r[X, T]      0      0
      0      0      r[X, T]^2      0
      0      0      0      r[X, T]^2 Sin[\theta]^2

In[4]= inv = Inverse[metric];

In[5]= Christoffel[\alpha_, \mu_, \nu_] :=
      Sum[1/2 inv[[\alpha, \lambda] \times (D[metric[[\mu, \lambda]], vars[[\nu]]] + D[metric[[\nu, \lambda]], vars[[\mu]]] - D[metric[[\mu, \nu]], vars[[\lambda]]]), {\lambda, 1, 4}]

In[6]= Riemann[\sigma_, \mu_, \nu_, \kappa_] := D[Christoffel[\sigma, \mu, \kappa], vars[[\nu]]] - D[Christoffel[\sigma, \mu, \nu], vars[[\kappa]]] +
      Sum[Christoffel[\sigma, \nu, \lambda] \times Christoffel[\lambda, \mu, \kappa] - Christoffel[\sigma, \kappa, \lambda] \times Christoffel[\lambda, \mu, \nu], {\lambda, 1, 4}]

In[7]= Ricci[\mu_, \nu_] := Sum[Riemann[\alpha, \mu, \alpha, \nu], {\alpha, 1, 4}]

In[8]= r[X_, T_] := 2 m (1 + ProductLog[X^2 - T^2 / E])

In[9]= Table[Ricci[\mu, \nu], {\mu, 1, 4}, {\nu, 1, 4}] // FullSimplify // TableForm

Out[9]/TableForm=
      0      0      0      0
      0      0      0      0
      0      0      0      0
      0      0      0      0

```

On a démontré que la métrique de Kruskal est régulière sur tout son ensemble de définition, incluant l'intérieur de la sphère de Schwarzschild, que son déterminant y est partout strictement négatif, qu'elle possède bien une symétrie sphérique, qu'elle est statique, respectant un champ de Killing asymptotiquement temporel, et enfin qu'elle est bien solution de l'équation d'Einstein dans le vide. L'argument qui consiste à dire que les changements de coordonnées qui aboutissent à cette métrique sont mal définis est donc invalide, puisqu'on a montré que la métrique est une solution valide du problème de Schwarzschild. Les étapes de construction historique qui menèrent à obtenir cette métrique sont hors sujet.